UJF - Licence L2 Janvier 2003

Dans toute la feuille E est un espace vectoriel de dimension n sur un corps K et f, g sont des endomorphismes de E.

1. Les affirmations suivantes sont-elles vraies:

   - $\chi_f = \chi_g$ et $\mu_f = \mu_g$ implique $(\exists h \in \mathrm{GL}_E)(f = hgh^{-1})$.
   - $(\exists h \in GL_E)(f = hgh^{-1})$ implique $\chi_f = \chi_g$ et $\mu_f = \mu_g$.
   - $(\exists h \in GL_E)(f = hgh^{-1})$ implique que pour tout $\lambda \in K$, $\dim \mathrm{Ker}(f - \lambda Id_{\mathrm{E}}) = \dim \mathrm{Ker}(g - \lambda Id_{\mathrm{E}})$.

2. Faire la réduction de Jordan des matrices nilpotentes suivantes:

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -4 & -2 \\ 12 & -6 & -3 \\ 8 & -4 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 8 & -4 & -2 \\ 17 & -8 & -5 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 2 & 0 \\ 8 & 4 & 0 & -2 \\ 12 & 0 & 4 & -5 \\ 0 & -12 & 8 & -4 \end{bmatrix}$$

3. Faire la réduction de Jordan des matrices suivantes:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} -5 & 6 & 5 & 0 \\ -2 & -13 & -3 & -4 \\ -2 & 21 & 8 & 5 \\ 14 & 24 & -1 & 11 \end{bmatrix}$$

   (On pourra passer sur les calculs qui donnent $\mu_F = (X+1)^2(X-1)(X-2)$...ou en faire un exercice de révision)

4. Calculer l'exponentielle des matrices A à G.

5. Déterminer les classes de similitude des endomorphismes nilpotents de $\mathbb{R}^3$.

6. Soit $C(f)$ le commutant de f, c'est à dire $\{g \in \mathrm{End}(E) | f \circ g = g \circ f\}$.

   Montrer que $C(f)$ est l'ensemble des polynômes en f si et seulement si f admet un vecteur cyclique.

7. A quelle condition f et $2f$ sont ils semblables ?

8. Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que M et sa transposée sont semblables. Que peut-on dire sur $\mathbb{R}$?

9. Soit M une matrice à coefficients complexes.

   Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\lim_{t \to +\infty} e^{tM} = 0$.

   (Hors programme...on peut admettre ici que pour une matrice complexe, "tendre vers 0" est équivalent à "tous les coefficients tendent vers 0" (on met sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ la topologie de $\mathbb{R}^{2n^2}$)).