Chapitre VI - Perspective à point de fuite

(...) je me circonscrivis dans un cercle d'esprits actifs, studieux, spéciaux, absorbés, ennemis des chimères, qui faisaient de la science, de l'érudition ou de l'art, comme ce Florentin ingénu qui créait la perspective, et la nuit réveillait sa femme pour lui dire :
« Quelle douce chose que la perspective ! »

Eugène Fromentin, *Dominique*

1 Introduction : des infiniments petits de Pascal à la fenêtre d'Alberti.

1.1 Un bateau s'en va sur l'eau...

Pascal, souhaitant convaincre une personne du fait que l'on peut trouver des longueurs aussi petites que l'on veut, utilise le raisonnement suivant [1] :

« *Et dans l'espace le même rapport se voit entre ces deux infinis contraires ; c'est-à-dire que, de ce qu'un espace peut être infiniment prolongé, il s'ensuit qu'il peut être infiniment diminué, comme il paraît en cet exemple : si on regarde au travers d'un verre un vaisseau qui s'éloigne toujours directement, il est clair que le lieu du diaphane* [2] *où l'on remarque un point tel qu'on voudra du navire haussera toujours par un flux continuel, à mesure que le vaisseau fuit. Donc, si la course du vaisseau est toujours allongée et jusqu'à l'infini, ce point haussera continuellement ; et cependant il n'arrivera jamais à celui où tombera le rayon horizontal mené de l'œil au verre, de sorte qu'il en approchera toujours sans y arriver jamais, divisant sans cesse l'espace qui restera sous ce point horizontal, sans y arriver jamais. D'où l'on voit la conséquence nécessaire qui se tire de l'infinité de l'étendue du cours du vaisseau, à la division infinie et infiniment petite de ce petit espace restant au dessous de ce point horizontal.* »

Quelles hypothèses cette démonstration fait-elle ?

On suppose que l'œil de Pascal se trouve quinze mètres au dessus du niveau de l'eau, et que la poupe du bateau qui lui sert de point de repère se trouve à deux mètres du niveau de l'eau.

Le bateau s'éloigne à la vitesse constante de 5 nœuds, et se trouve à midi à 100 mètres de la vitre. Pascal, lui, observe la scène en étant placé un mètre derrière [ces distances étant comptées horizontalement].

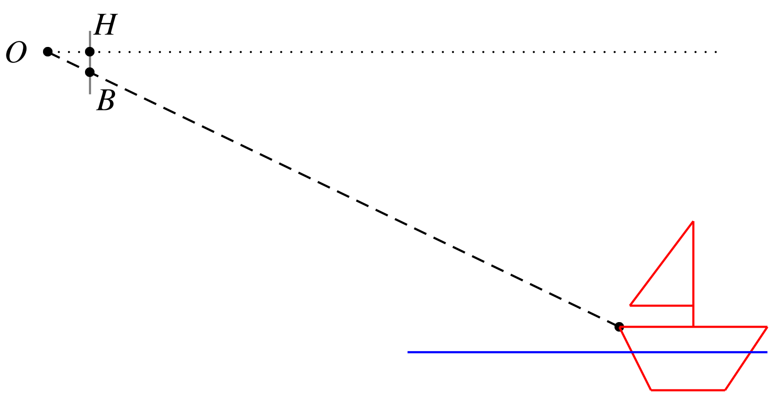
On appelle H le point qui est l'intersection de la vitre avec la droite horizontale passant par l'œil ; on appelle B le point d'intersection de la vitre avec la droite joignant l'œil à la poupe du navire.

La distance que Pascal estime devenir infiniment petite est la distance HB.

Soit t le temps écoulé, en heures, à partir de midi.
Sachant qu'un nœud marin vaut $1852 m/h$, montrer que :

$$HB(t) = \frac{13}{101 + 9260t}.$$

(on admet sans démonstration que la Terre est plate et la mer infinie)



Que vaut HB à midi ? Cinq minutes plus tard ?

Une heure plus tard ? Un jour plus tard ?

La démonstration de Pascal est-elle correcte ?

[1] Blaise Pascal, *De l'esprit géométrique*, vers 1657
[2] la vitre

Le fait que, au fur et à mesure que le bateau s'éloigne, le point B se rapproche indéfiniment du point H en traçant sur la vitre une trajectoire rectiligne est prouvé par le fait que la fonction $HB(t)$ tende vers 0 quand t tend vers l'infini. Le point H, qui n'est jamais atteint, est appelé **point de fuite** de la trajectoire.

1.2 Deux bateaux s'en vont sur l'eau...

Supposons maintenant que deux bateaux suivent des trajectoires parallèles depuis le port.

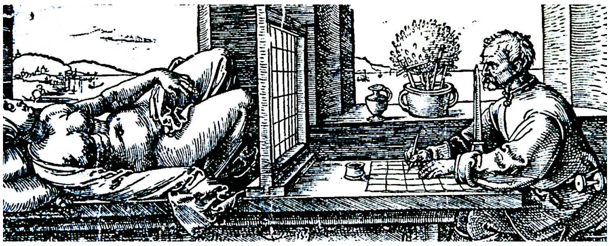
On constate que, plus ils s'éloignent du port, plus leurs images sur la vitre semblent se rapprocher du même point H : les deux trajectoires ont le même point de fuite.

En revanche si un bateau s'éloigne du port dans une autre direction, le point de fuite est différent !

Et on constate, si l'on considère ainsi toutes les trajectoires rectilignes possibles des bateaux, que l'ensemble des points de fuite sont alignés : ils forment la **ligne d'horizon**.

1.3 La fenêtre d'Alberti et la première règle de la perspective

Les artistes de la Renaissance dessinaient en utilisant la technique exposée par Pascal : ils plaçaient leur œil (à une position fixée par un œilleton) derrière une vitre, et dessinaient sur cette vitre l'image des objets situés au-delà.



Dürer, *dessinateur à la femme couchée*, 1525

Ce dispositif est appelé « fenêtre d'Alberti », du nom du premier auteur à fixer mathématiquement, au début du XV^{e} siècle, les principes de la perspective que les peintres avaient découvert de façon empirique.

Dans cette représentation, les lignes parallèles (lignes de carrelage, poutres au plafond, arêtes des murs...) sont représentées par des segments qui semblent converger en un même point de fuite (sauf si leur direction est parallèle au plan du tableau : dans ce cas, elles sont bien représentées par des lignes parallèles).

Cette représentation est appelée **perspective à point de fuite**, et on parle de « première règle de la perspective » pour désigner cette propriété des droites parallèles qui convergent vers le point de fuite.

extrait du tableau de Paolo Ucello, *La profanation de l'hostie*, 1465-1469,

1.4 Un carrelage, et la deuxième règle de la perspective

Dans le tableau ci-dessus les poutres et toutes leurs parallèles (lignes des carreaux, arêtes du bureau,...) convergent bien vers un unique point de fuite : la première règle de la perspective est vérifiée.

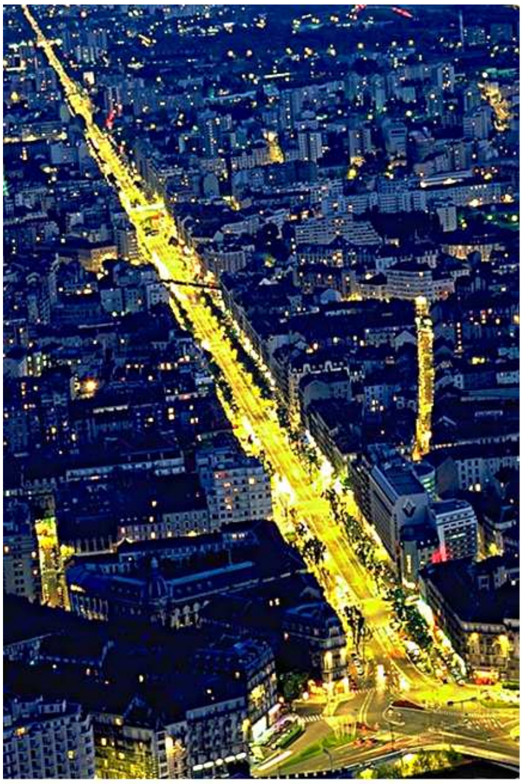
Ce point de fuite forme avec le point de fuite des diagonales des carreaux une droite horizontale ; de plus chaque diagonale des carreaux recoupe sur des coins de carreaux les lignes qui convergent vers le point de fuite. Nous verrons comment cette « deuxième règle de la perspective » permet de reconstruire le carrelage si l'on ne dispose que de la première rangée de carreaux, en bas de l'image.

2 Deux autres expériences

2.1 Avec une bougie

Plaçons un objet rectangulaire entre une bougie et un mur : l'image de l'objet formée sur le mur est un quadrilatère, en général quelconque. Si l'on déplace le rectangle de sorte que deux de ses cotés soient parallèles au mur, on constate que l'image devient un trapèze. Enfin si on fait en sorte que le rectangle soit parallèle au mur, le trapèze devient un rectangle.

2.2 Avec un appareil photo



On constate sur ces images que des lignes parallèles de l'espace (les bords de l'avenue, les lignes sur une face de la pyramide, les lignes de lavandin, les troncs des mélèzes) sont rendues sur les photos par des droites concourantes.

Nous venons de voir différents procédés permettant de représenter sur un plan (vitre, toile, mur, film) l'image d'une trajectoire ou d'un objet de l'espace. Dans chaque cas on constate que des parallèles de l'espace sont représentées par des droites qui semblent être concourantes en un même point de fuite.

Nous allons dans ce qui suit expliquer cela : toutes ces situations sont des cas particuliers de représentation en perspective « à point de fuite ».

3 La perspective centrale, ou perspective à point de fuite

3.1 Définition

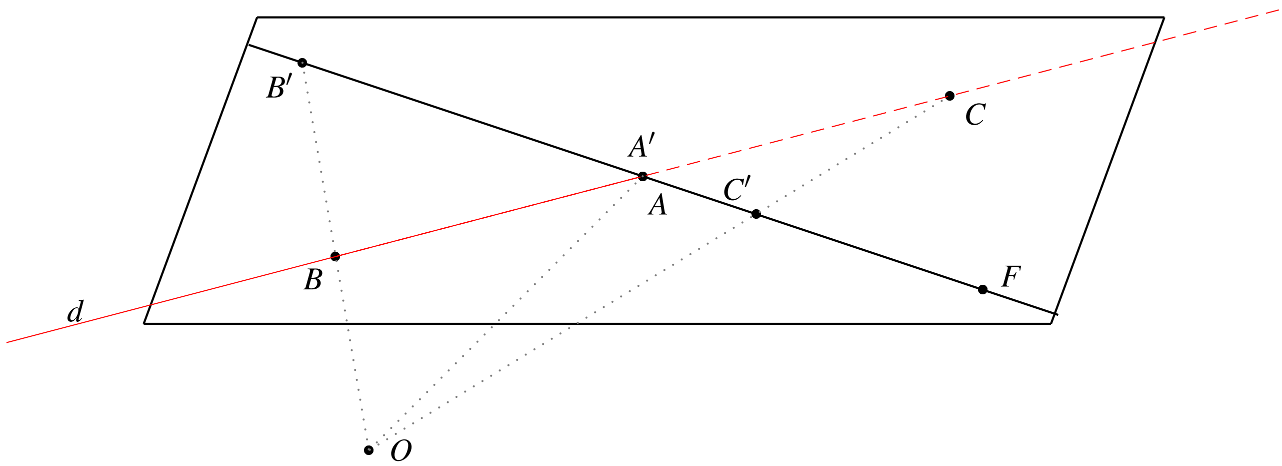
Dans tout ce qui suit, on fixe un plan P de l'espace et un point O qui n'appartient pas à P.
On note $\widetilde{P}$ le plan passant par O et parallèle à P.

La **perspective centrale** (de centre, ou de point de vue O, de plan P) est une façon de représenter dans le plan P les figures de l'espace. On associe pour cela aux points de l'espace une image dans le plan P : l'image d'un point M distinct de O est, s'il existe, le point d'intersection de la droite (OM) et du plan P.

On notera M' la représentation du point M.

L'exemple suivant d'une droite d qui coupe le plan P en A, et les images de trois points A, B, C de d, illustre les apparitions « classiques » de la perspective centrale.

- Le cas du point $A = A'$ n'est pas très intéressant : il s'agit d'un point qui est déjà sur le plan P, donc qui est représenté par lui-même dans la perspective.
- Le cas du point C, situé derrière le plan P, correspond à la situation de la fenêtre d'Alberti : on peut voir P comme une vitre sur laquelle on dessine l'image C' du point C.
- Le cas d'un point B, situé entre O et P, correspond à la situation de la bougie : on projette sur le plan P, vu comme un écran, l'ombre B' du point B éclairé par une bougie placée en O.
- Le dernier cas, non dessiné, est celui d'un point D qui serait situé derrière O (donc très à gauche sur d, sur la figure), et dont l'image sur le plan se trouverait sur la figure à droite de F, sur l'image de d. Cela correspond à la situation de l'appareil photo : le plan P figure le film, qui est exposé par la lumière provenant du point D à travers l'objectif O.



Pour que le point M ait une image, il faut et il suffit que (OM) ne soit pas parallèle à P. Autrement dit : les points n'ayant pas d'image sont exactement les points du plan $\widetilde{P}$ passant par O et parallèle à P.

3.2 Image d'une droite.

Soit une droite d dont on cherche à déterminer la représentation. On va montrer que :

- si d est parallèle à P, alors :
  - ou bien d est incluse dans $\widetilde{P}$, et aucun des points de d n'a d'image.
  - ou bien d n'est pas incluse dans $\widetilde{P}$, et l'image de d est une droite de P.
- si d n'est pas parallèle à P, alors :
  - si O appartient à d, l'image de d est le point d'intersection de d et P.
  - sinon, et l'image de d est une droite privée d'un point qui est appelé **point de fuite** de la droite d.

Cela explique que l'on parle aussi de **perspective à point de fuite** pour désigner la perspective centrale.

démonstration :

* si d est incluse dans $\widetilde{P}$, pour tout point M de d, (OM) et P sont parallèles et leur intersection est vide.

* si d contient O, pour tout point M de d, $(OM) = D$, ce qui prouve le résultat.

* dans les autres cas (d ne contient pas O et n'est pas incluse dans $\widetilde{P}$) : le plan Π défini par le point O et la droite d n'est pas parallèle au plan P : l'intersection de Π et P est une droite Δ. Comme pour tout point M de d, (OM) est inclus dans Π, l'intersection de (OM) et P appartient à Δ : cela prouve que l'image de d est incluse dans Δ. Réciproquement fixons un point N de Δ. (ON) et d sont deux droites distinctes du plan Π : elles sont soit parallèles, soit sécantes. Si elles sont sécantes, N est l'image de leur point d'intersection, donc N appartient bien à l'image de la droite d. On distingue maintenant deux cas :

Si d est parallèle à P, (ON) et d ne peuvent être parallèles, donc dans ce cas, tout point de Δ est l'image d'un point de d, et l'image de d est exactement la droite Δ.

Sinon, on considère la parallèle à d passant par O : elle rencontre P (et donc Δ, car cette parallèle est une droite de Π) en un point F. Il n'existe pas de point M de d tel que F soit sur (OM) (car d et (OF) sont parallèles !) Pour tout autre point N de Δ, (ON) et d ne sont pas parallèles, et si on appelle M leur point d'intersection, N est bien l'image de M. Cela prouve que l'image de la droite d est la droite Δ privée du point F. ■

Conséquences : - si trois points sont alignés leurs images (si elles existent) sont alignées.

- cela fournit une méthode pratique pour construire l'image d'une droite d : il suffit de construire les images A' et B' de deux points A et B de d, et le cas échéant de determiner le point de fuite comme intersection de la droite $(A'B')$ et de la parallèle à d passant par O.

Remarques :

- la perspective centrale ne respecte pas les milieux, le parallélisme, l'orthogonalité, les distances.
- dans le cas particulier où l'on étudie l'image d'une figure incluse dans un plan frontal p (un plan parallèle à P), en revanche, le théorème de Thalès permet de voir que les milieux, l'orthogonalité et les formes sont conservées : le plan P présente alors simplement un agrandissement ou une réduction du plan p (cela dépend des positions relatives de p, P et O).

Raphaël, *L'école d'Athènes*, 1510-1511.

3.3 Images de deux droites parallèles

Si deux droites sont parallèles à P (et ne sont pas incluses dans le plan $\widetilde{P}$), leurs images sont deux droites de P parallèles entre elles. Mais ce cas est très particulier : en général la perspective centrale ne respecte pas le parallélisme.

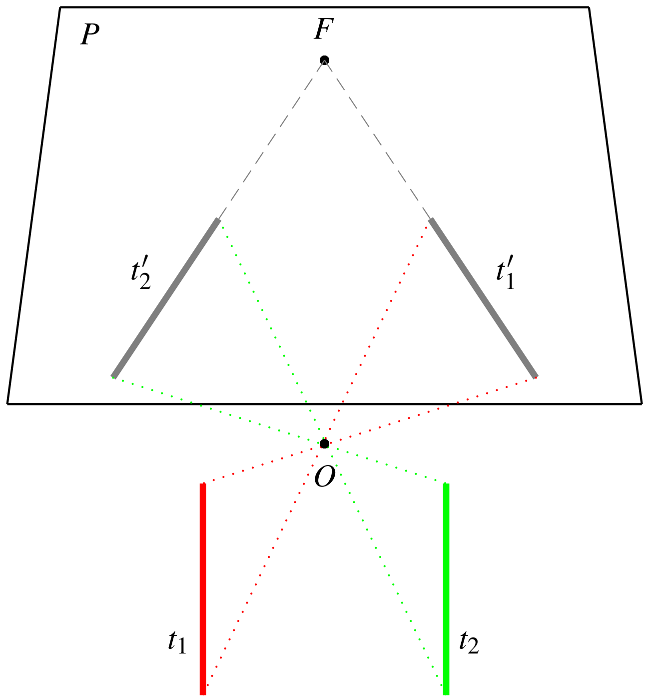
Cependant on constate une propriété remarquable : les images de deux droites parallèles « génériques » (qui ne sont pas parallèles à P et ne contiennent pas O) ont le même point de fuite.

En effet, le point de fuite d'une droite d est défini comme l'intersection du plan P avec la parallèle à d passant par O : seule la direction de d intervient, et deux droites parallèles ont la même direction.

Illustration :
Dans cette forêt de hauts mélèzes, les troncs espacés sont parallèles.
Le photographe doit pencher l'appareil pour faire rentrer les arbres dans le cadre : les troncs ne sont plus parallèles au film.
On constate que les troncs semblent se rejoindre en un point situé sur le haut de l'image.

Explication :
On figure 2 troncs par les segments t_1 et t_2.
Le plan P représente le film, et le point O l'objectif ; P est situé derrière O, les troncs devant, et le haut du plan P est légèrement incliné vers l'arrière.
Si on construit les images t_1' et t_2' de t_1 et t_2, on constate que les droites qui les portent sont sécantes au point de fuite F.

(l'image est inversée droite-gauche et haut-bas...l'image sur le plan est fidèle à la photo, alors que les mélèzes pointent vers le bas de la feuille)



Autres illustrations : revoir les tableaux déjà étudiés, ou bien l'exemple des deux bateaux qui s'éloignent du port avec des trajectoires parallèles.

3.4 Image d'un plan, ligne de fuite

L'image sur P d'un plan non parallèle à P est exactement P privé d'une droite, appelée **ligne de fuite**.

Démonstration : on considère un plan p non parallèle à P, dont on cherche l'image (on pourra imaginer, en lien avec l'introduction, P comme le plan de la vitre, et p comme le plan de la mer).

Le plan parallèle à p passant par O rencontre P selon une droite f. Si N est un point de f, ON est parallèle à p, donc on ne peut trouver M dans p tel que $(OM) = (ON)$, et N n'est pas dans l'image de p.

A l'inverse si l'on considère un point N de P qui n'est pas dans f, la droite (ON) n'est pas parallèle au plan p, donc (ON) et p ont un point d'intersection M, et N est l'image de M.

Cela prouve que l'image de p est exactement P privé de f. Bien entendu, f est l'ensemble des points de fuite des droites de p : f est la ligne de fuite du plan p ■

Remarques : - par analogie avec l'exemple de la mer, on parle aussi de **ligne d'horizon** quand cette ligne est horizontale sur le tableau.

- deux plans parallèles ont la même ligne de fuite (car celle-ci est déterminée par la direction du plan).

3.5 Image d'un carrelage

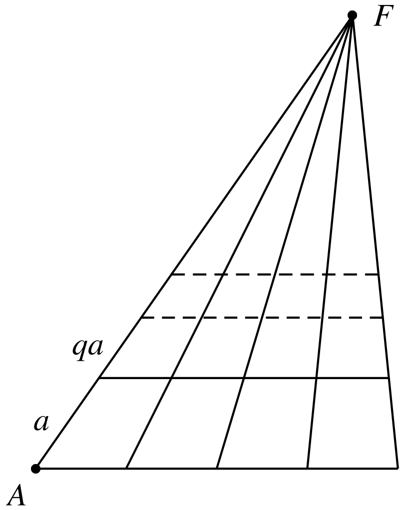
Pour donner l'impression de profondeur à une scène comportant un carrelage au sol, les peintres ont vite perçu qu'il était nécessaire que les carreaux soient représentés par des quadrilatères de dimensions de plus en plus petites.
Les premiers essais empiriques montrent souvent un choix de représenter des carreaux dont les dimensions suivent une progression géométrique de raison $2/3$. Ce choix est critiqué par Leon Battista Alberti (*Della pittura*, 1435) : effectivement, en perspective centrale les dimensions des carreaux ne peuvent diminuer selon une progression géométrique.

Nous nous limitons ici à la représentation en perspective d'un carrelage dont une des directions est parallèle au tableau : les carreaux sont alors des trapèzes, dont les côtés non parallèles sont concourants en un point de fuite.

Lorenzetti, *Annonciation*, début XIV^{e}

Démontrons que les dimensions des carreaux ne peuvent suivre une progression géométrique, en effectuant un raisonnement par l'absurde, proche du raisonnement original d'Alberti :

Soit la représentation d'un carrelage ; on fixe une fuyante, et on note a la dimension du premier carreau, sa « profondeur », le long de cette ligne.
Les profondeurs des carreaux successifs sont donc $a, qa, q^2a, \ldots, q$ étant la raison de la progression. Quelle est alors la longueur AF ?



Conclure en faisant varier la valeur de a.

On peut faire une autre remarque, sous la même hypothèse : appelons b_0, b_1, b_2, $\ldots$ les largeurs des carreaux dont le côté gauche mesure respectivement a, qa, q^2a, $\ldots$

D'après le théorème de Thalès le rapport $(q^n a + q^{n+1}a + \ldots)/b_n$ est constant, donc $\frac{q^n a}{(1-q)b_n}$ est constant : b_n suit, aussi, une progression géométrique de raison q.

Par conséquent, les triangles correspondant aux demi-carreaux supérieurs sont tous semblables : les diagonales des carreaux seraient parallèles, ce qui est impossible en perspective centrale.

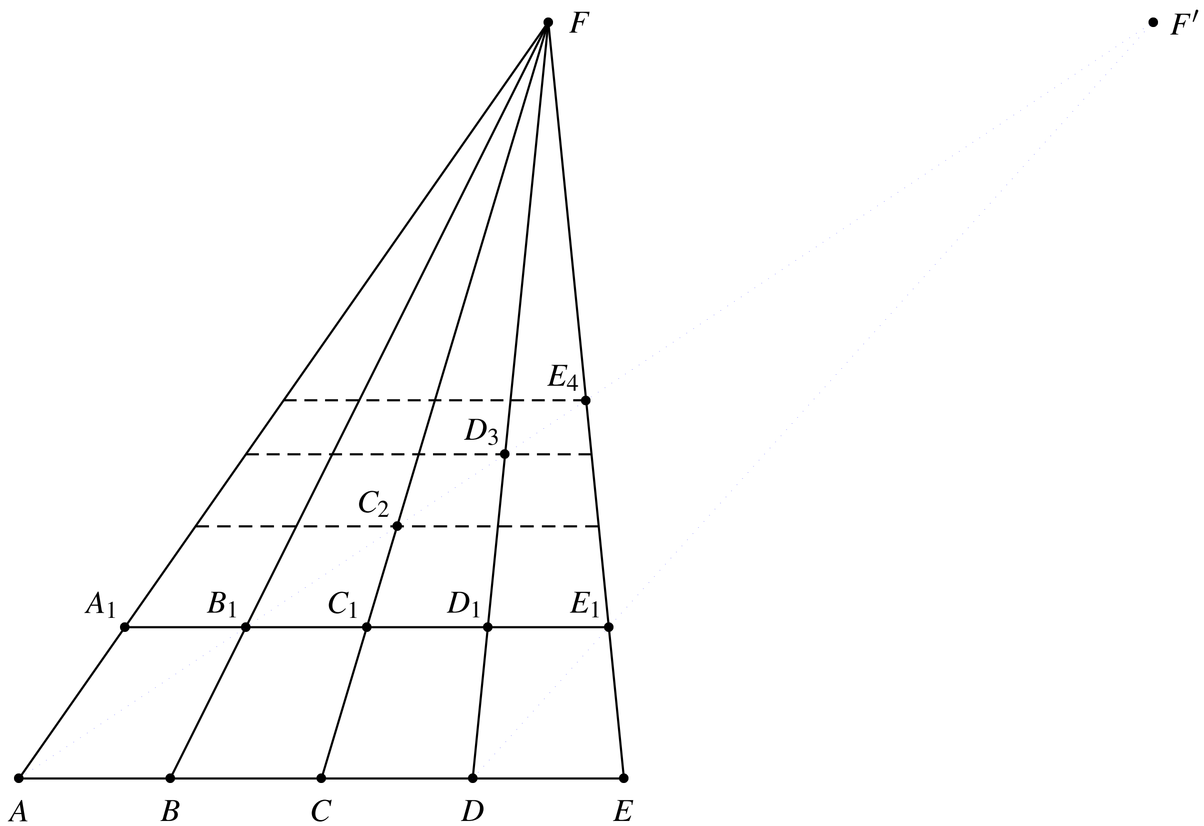
Aprés avoir montré que les dimensions des carreaux ne suivent pas une progression géométrique, et avant de calculer effectivement ces dimensions, nous allons étudier un moyen géométrique de construire l'image d'un carrelage connaissant uniquement le premier carreau, pour peu que l'on utilise une perspective à point de fuite.

Remarquons tout abord qu'il est facile de déterminer le point de fuite en prolongeant les deux côtés non parallèles des carreaux ; et par conséquent on peut tracer autant de carreaux que l'on souhaite sur la première rangée.

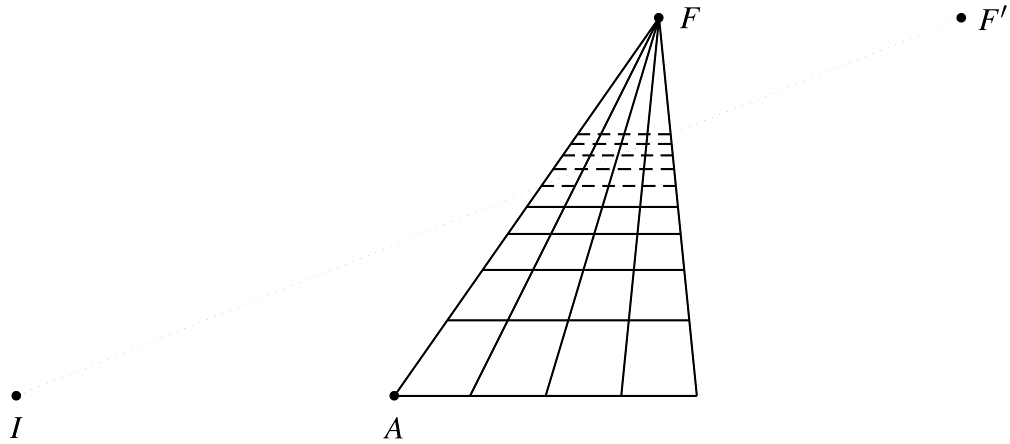
Supposons donc que l'on dispose d'une première rangée de cinq carreaux, de sommets A, B, C, D, E, A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, et du point de fuite F.

On peut alors tracer le point de fuite F' des diagonales des carreaux comme intersection des droites (AB_1) et (DE_1).

Mais la droite (AF') recoupe (CF) en un point C_2 qui donne le haut de la deuxième rangée de carreaux, (DF) en un point D_3 qui donne la troisième rangée, et (EF) en un point E_4 qui donne la quatrième.



Pour rajouter cinq rangées de carreaux, on peut recommencer ce procédé à partir d'un point I hors du tableau, situé horizontalement à cinq carreaux de A :



Même si le procédé géométrique que l'on vient d'exposer rend inutile à l'artiste le calcul des dimensions apparentes des carreaux, le mathématicien curieux va continuer un peu son étude : en reprenant les notations de la figure, on cherche donc à exprimer les longueurs A_nB_n et A_nA_{n+1} en fonction de n et des paramètres AB, AF et FF' déterminés par le premier carreau.

En appliquant le théorème de Thalès aux point F,A,B,A_n,B_n, on obtient

$$\frac{A_nB_n}{FA_n} = \frac{AB}{FA}.$$

En appliquant le théorème de Thalès aux points A,F,F',A_n et à l'intersection de AF' et de la parallèle à AB passant par A_n, on obtient

$$\frac{AA_n}{n.A_nB_n} = \frac{AF}{FF'}.$$

Ainsi, en multipliant ces deux expressions, $\frac{AA_n}{n.FA_n} = \frac{AB}{FF'}$, donc $AA_n = \frac{n.FA_n.AB}{FF'}$.

Comme $FA_n = FA - AA_n$, on en déduit que $AA_n + AA_n\frac{n.AB}{FF'} = \frac{n.AF.AB}{FF'}$, et donc finalement

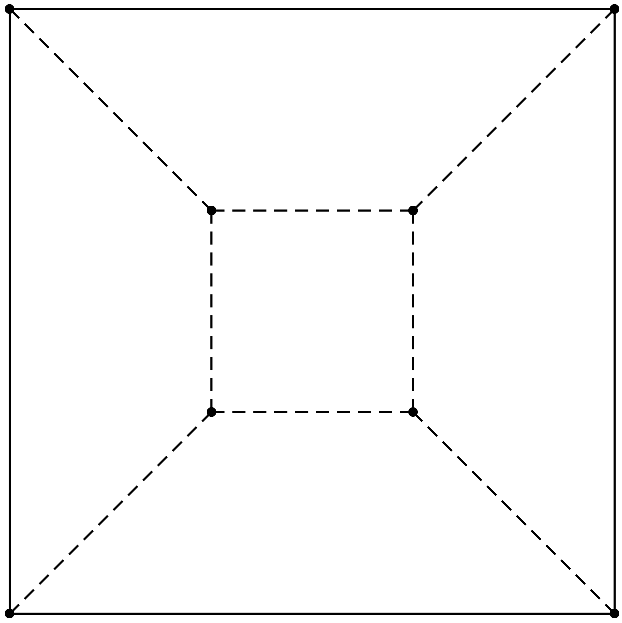
$$AA_n = \frac{n.AB.FA}{FF' + n.AB} = AF - \frac{AF}{1+\frac{n.AB}{FF'}}.$$

La longueur cherchée A_nA_{n+1} est alors égale à $AA_{n+1} - AA_n$, soit après simplification (toute relative) :

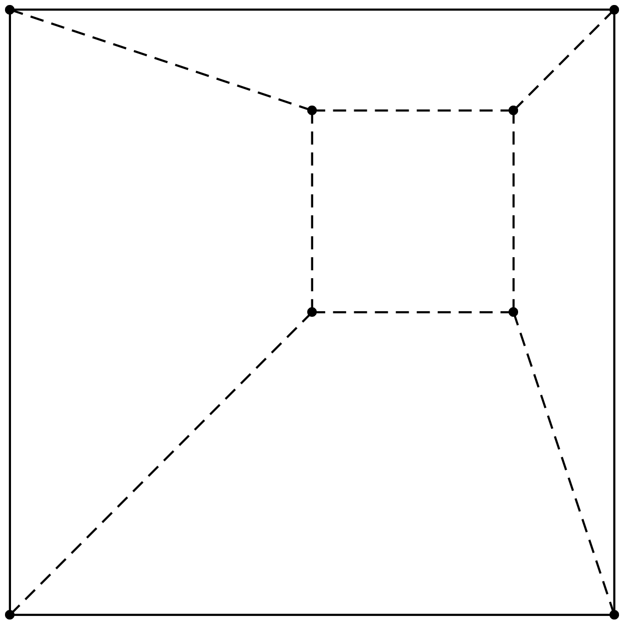
$$A_nA_{n+1} = \frac{AF.AB.FF'}{(FF' + n.AB)(FF' + (n+1).AB)}.$$

3.6 Représentation d'un cube

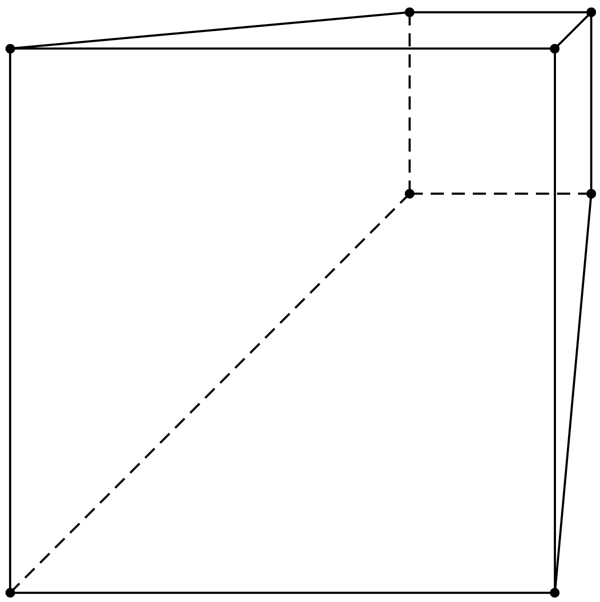
Si la droite joignant O au centre du cube est orthogonale au plan de projection :



Un cube tel que O soit legèrement décalé « en haut à droite » de la perpendiculaire au plan de projection passant par le centre du cube :



Un cube tel que O soit très décalé « en haut à droite » de la perpendiculaire au plan de projection passant par le centre du cube :



3.7 Quelques exemples

Les tableaux suivants respectent-ils les règles de la perspective ?

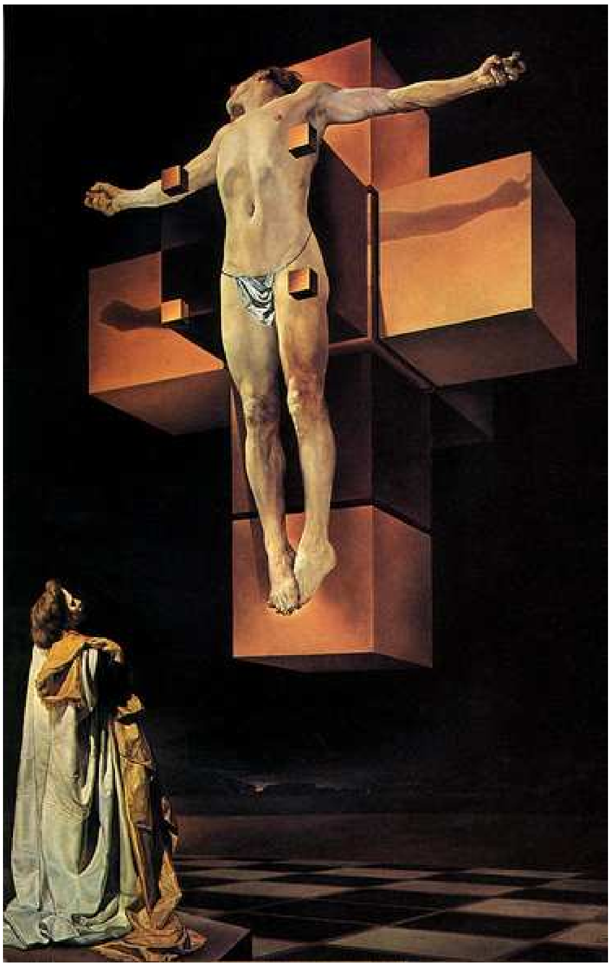
Buoninsegna, *La dernière Cène*, vers 1300

Lorenzetti, *L'annonciation*, 1344

Giotto, *Christ devant le Caïphe*, 1305

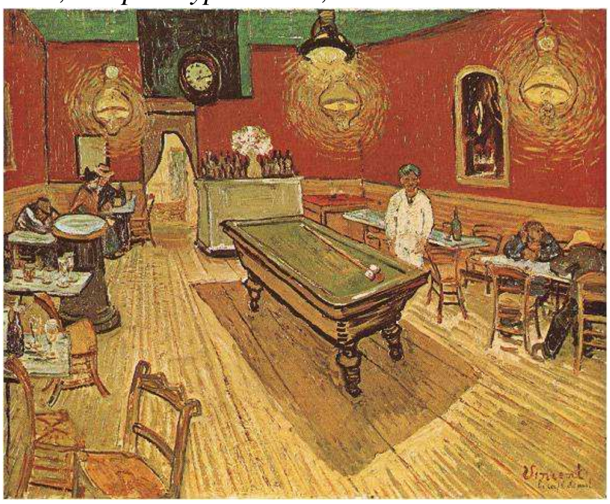
De Vinci, *L'annonciation*, 1475

Raphaël, *L'école d'Athènes*, 1510-1511



Dali, *CorpusHypercubus*, 1954

Dali, *La madone de port Lligat*, 1950



Van Gogh, *Café de nuit*

Van Gogh, *Chambre à Arles*